

少样本故障数据数控机床的贝叶斯可靠性分析

王智明¹, 杨建国²

- (1. 淮海工学院 机械工程学院, 江苏 连云港, 222005;
2. 上海交通大学 机械与动力工程学院, 上海, 200240)

摘要: 应用贝叶斯方法分析少样本故障数据数控机床的可靠性, 给出 2 参数威布尔分布模型参数及数控机床可靠性指标的估计和区间估计, 通过马尔科夫链蒙特卡罗抽样解决了贝叶斯可靠性分析中求解复杂后验积分的难题。结合一具体实例, 分析 10 台加工中心时间截尾的可靠性。计算结果表明: 在充分利用先验信息的基础上, 贝叶斯方法优于极大似然法和似然比检验法, 适合于少样本数据的可靠性分析。

关键词: 少样本数据; 贝叶斯可靠性; 数控机床; 马尔科夫链蒙特卡罗

中图分类号: TG659; TB114

文献标志码: A

文章编号: 1672-7207(2014)12-4201-05

Bayesian reliability analysis for numerical control machine tools with small-sized sample failure data

WANG Zhiming¹, YANG Jianguo²

- (1. School of Mechanical Engineering, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222005, China;
2. School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The reliability of numerical control (NC) machine tools with small-sized sample field data was analyzed using Bayesian method. Point and interval estimations of two-parameter Weibull distribution model and reliability indices of NC machine tools were presented. The problem of complex posterior integral in Bayesian reliability analysis was solved by Markov chain Monte Carlo (MCMC) sampling. Using a real field example, the reliability of 10 machining centers with time truncation was analyzed. The results show that based on the full use of priori information, Bayesian method is better than both maximum likelihood estimation method and likelihood ratio testing method, and suitable for reliability analyses of small-sized sample data.

Key words: small-sized sample data; Bayesian reliability; numerical control machine tool; Markov chain Monte Carlo

在数控机床的可靠性分析中, 当故障数据为大样本数据时(样本数大于 30), 常用的分析方法有最小二乘法^[1], 极大似然估计法^[2-3], 似然比检验法等^[4], 但随着数控机床可靠性的提高, 其故障数据为少样本数据, 此时为了提高数控机床的评估精度, 减少模型的不确定性, 可采用贝叶斯方法。但在使用该方法时, 通常有两个难点。其一是验前分布的选择, 具有一定

的主观性, 这也是该方法具有争议的一点; 其二是后验积分的求解, 特别是高维积分的求解, 有一定的难度, 当验前与后验分布不是共轭分布时, 需要数值方法, 有时甚至无法求解^[5]。马尔科夫链蒙特卡罗法是求解贝叶斯高维积分的有效方法之一^[6-8], 特别是 WinBUGS^[9-10]免费软件的出现, 使得上述问题得到了有效地解决。Weibull 分布模型是可靠性分析中常见的

收稿日期: 2014-02-10; 修回日期: 2014-05-23

基金项目(Foundation item): 国家自然科学基金资助项目(51275305)(Project (51275305) supported by the National Natural Science Foundation of China)

通信作者: 王智明(1969-), 男, 甘肃清水人, 博士, 副教授, 从事数控机床的可靠性评估及其预防维修; 电话: 0518-85895330; E-mail: wangzhiming301@sohu.com

模型之一,该模型广泛应用于机械、电子、航天等产品的可靠性评估及验证试验^[1-4, 11-15]。其中,对于少样本故障数据,文献[12-15]分别应用贝叶斯方法分析了相关产品的可靠性。本文作者应用马尔科夫链蒙特卡洛法,分析少样本故障数据数控机床的可靠性,结果显示贝叶斯方法优于常见的极大似然法和似然比检验法,适合于少样本数据的可靠性分析。

1 贝叶斯可靠性分析

贝叶斯估计综合应用样本信息和验前信息,其后验信息更新了验前信息,使得估计结果更接近真实情况^[5]。当对待估量无任何验前信息时,可使用无信息先验。通常情况下,当对某一事物的认知并非一无所知时,可用信息先验。

1.1 模型参数无信息先验

当数控机床无故障工作时间 x 服从两参数 Weibull 分布时,其概率密度函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] \quad (1)$$

式中: β 为形状参数,大于0; η 为尺度参数,大于0。

令 $\lambda = 1/\eta^{\beta}$,则其概率密度函数又可写为

$$f(x) = \lambda \beta x^{\beta-1} \exp(-\lambda x^{\beta}) \quad (2)$$

设有 k 台数控机床,其中第 j 台机床在试验时间 $[0, T_j]$ 内的故障时间为 $t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{n_j, j}$,当 $t_{n_j, j} < T_j$ 时为时间截尾,当 $t_{n_j, j} = T_j$ 时为故障截尾。则 k 台数控机床无故障工作时间的似然函数为

$$L(\text{data}; \lambda, \beta) = \prod_{j=1}^k [\exp(-\lambda X_j^{\beta}) \times \prod_{i=1}^{n_j} (\lambda \beta x_{ij}^{\beta-1} \exp(-\lambda x_{ij}^{\beta}))] \quad (3)$$

式中: $X_j = T_j - t_{n_j, j}$, $x_{ij} = t_{ij} - t_{i-1, j}$, $t_0 = 0$ 。

当对模型参数无任何先验信息时,参数联合先验为

$$\pi(\lambda, \beta) \propto (\lambda \beta)^{-1} \quad (4)$$

所以,由贝叶斯原理知参数无信息联合后验为

$$\pi(\lambda, \beta | \text{data}) \propto L(\text{data}; \lambda, \beta) \pi(\lambda, \beta) \propto (\lambda \beta)^{n-1} \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^{\beta}) \prod_{i=1}^{n_j} (x_{ij}^{\beta-1} \exp(-\lambda x_{ij}^{\beta})) \right] \quad (5)$$

$$\text{式中: } n = \sum_{j=1}^k n_j。$$

由式(5)得参数满条件后验分布分别为

$$\pi(\lambda | \beta, \text{data}) \propto \lambda^{n-1} \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^{\beta}) \prod_{i=1}^{n_j} \exp(-\lambda x_{ij}^{\beta}) \right] \quad (6)$$

$$\pi(\beta | \lambda, \text{data}) \propto \beta^{n-1} \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^{\beta}) \times \prod_{i=1}^{n_j} (x_{ij}^{\beta-1} \exp(-\lambda x_{ij}^{\beta})) \right] \quad (7)$$

应用马尔科夫链蒙特卡洛法^[7-8]获取参数后验估计的步骤如下:

1) 任意选取初始点 $\theta_0 = (\lambda^0, \beta^0)$ 。

2) 设 $i = 0$,从参数满条件后验分布中抽样产生 $\theta_{i+1} = (\lambda^{i+1}, \beta^{i+1})$,即从 $\pi(\lambda | \beta, \text{data})$ 抽样产生 λ^{i+1} ,从 $\pi(\beta | \lambda, \text{data})$ 抽样产生 β^{i+1} 。

3) 设 $i = i + 1$,抽样产生 $\theta_{i+2} = (\lambda^{i+2}, \beta^{i+2})$,重复步骤2) m 次。其中,经前 q 次抽样过渡期,马尔科夫链收敛,此时,舍弃过渡期抽样值,取后 $m - q$ 次抽样均值为参数估计。即

$$E(\theta) = \frac{1}{m - q} \sum_{i=q+1}^m \pi(\theta_i | \text{data}) \quad (8)$$

1.2 模型参数部分信息先验

Weibull 分布的形状参数具有明显的物理意义,对于无故障工作时间服从 Weibull 分布的数控机床,当形状参数 $\beta = 1$ 时,表明故障处于偶然失效区;当 $\beta < 1$ 或 $\beta > 1$ 时,则表明故障为早期失效或耗损失效。因此,在数控机床的可靠性分析中,通常对形状参数有一定的了解。此时,对处于某一范围的形状参数可取其验前分布为均匀分布。即

$$\pi(\beta) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1}, \beta_1 < \beta < \beta_2 \quad (9)$$

式中: β_2 和 β_1 分别为形状参数上下限。

相反,对于尺度参数的了解一般知之甚少,此时取其先验为无信息先验。因此,参数联合后验为

$$\pi(\lambda, \beta | \text{data}) \propto \lambda^{n-1} \beta^n \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^{\beta}) \times \prod_{i=1}^{n_j} (x_{ij}^{\beta-1} \exp(-\lambda x_{ij}^{\beta})) \right] \quad (10)$$

参数满条件后验分布为

$$\pi(\lambda|\beta, \text{data}) \propto \lambda^{n-1} \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^\beta) \times \prod_{i=1}^{n_j} \exp(-\lambda x_{ij}^\beta) \right] \quad (11)$$

$$\pi(\beta|\lambda, \text{data}) \propto \beta^n \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^\beta) \times \prod_{i=1}^{n_j} (x_{ij}^{\beta-1} \exp(-\lambda x_{ij}^\beta)) \right] \quad (12)$$

1.3 模型参数信息先验

当对尺度参数有一定的了解时, 可对其采用信息先验。本文取其先验为伽马分布, 形状参数 β 先验仍为均匀分布, 则

$$\pi(\lambda) = b^a \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) / \Gamma(a) \quad (13)$$

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

式中: a 和 b 分别为伽马分布参数。

其均值和方差分别为

$$E = a/b, V = a/b^2 \quad (14)$$

所以, 参数联合先验为

$$\pi(\lambda, \beta) \propto \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) \quad (15)$$

联合后验为

$$\pi(\lambda, \beta|\text{data}) \propto \lambda^{n+a-1} \beta^n \exp(-b\lambda) \times \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^\beta) \prod_{i=1}^{n_j} (x_{ij}^{\beta-1} \exp(-\lambda x_{ij}^\beta)) \right] \quad (16)$$

参数满条件后验分布为

$$\pi(\lambda|\beta, \text{data}) \propto \lambda^{n+a-1} \exp(-b\lambda) \times \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^\beta) \prod_{i=1}^{n_j} \exp(-\lambda x_{ij}^\beta) \right] \quad (17)$$

$$\pi(\beta|\lambda, \text{data}) \propto \beta^n \prod_{j=1}^k \left[\exp(-\lambda X_j^\beta) \times \prod_{i=1}^{n_j} (x_{ij}^{\beta-1} \exp(-\lambda x_{ij}^\beta)) \right] \quad (18)$$

1.4 可靠性指标的贝叶斯点估计和区间估计

数控机床可靠性评估中常用的可靠性指标有平均无故障工作时间 t_{MTBF} 、某一时刻 τ 的任务可靠度 $R(\tau)$ 及给定可靠度的工作保证时间 $t_w(R)$, 其表达式分别为

$$t_{MTBF} = (1/\lambda)^{1/\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (19)$$

$$R(\tau) = \exp(-\lambda \tau^\beta) \quad (20)$$

和

$$t_w(R) = (-\ln R / \lambda)^{1/\beta} \quad (21)$$

所以, 可靠性指标, 如任务可靠度的贝叶斯估计为

$$E[R(\tau)|\text{data}] = \frac{1}{m-q} \sum_{i=q+1}^m \exp(-\lambda_i \tau^{\beta_i}) \quad (22)$$

2 实例分析

Dai 等^[2]用两参数 Weibull 分布模型分析了 10 台加工中心的可靠性, 给出了模型参数的点估计, 无故障工作时间如表 1 所示。

表 1 10 台机床时间截尾试验无故障工作时间

Table 1 Time between failures for 10 machine tools with time-truncated test

机床序号	无故障工作时间/h				
1	176.00	248.00	332.50+		
2	10.50	472.00	45.00	39.00	84.00+
3	209.33	261.25	267.00+		
4	510.00	120.00	165.00+		
5	224.00	267.50	283.16+		
6	50.00	138.50	562.00+		
7	32.00	700.00+			
8	398.00	387.00+			
9	478.00	383.00+			
10	353.00	348.00	137.06	1.50+	

针对该案例, 王智明等^[3-4]分别用极大似然法和似然比检验法给出了模型参数和可靠性指标的点估计和区间估计, 结果如表 2 所示。应用贝叶斯可靠性分析方法, 所得结果分别如表 3 和 4 所示。其中表 3 所示为参数无信息先验或部分信息先验分析结果, 表 4 所示为参数信息先验分析结果, 且 $\lambda \sim \text{Gamma}(64, 8 \times 10^4)$, $\beta \sim U(0.5, 3)$ 。图 1 所示为各参数及可靠性指标后验抽样密度。

从表 2 可见: 似然比检验估计结果稍好于极大似然估计, 除尺度参数估计外, 其余估计的区间长度均小于后者。表 4 结果显示: 参数信息先验贝叶斯可靠性分析结果明显优于似然比检验估计, 各参数和可靠性指标的估计区间长度均小于似然比估计, 但表 3 同

表 2 极大似然估计和似然比检验估计可靠性分析结果

Table 2 Reliability analysis results using maximum likelihood estimation and ratio test estimation

变量	极大似然估计 ^[3]			似然比检验估计 ^[4]		
	点估计	95%区间估计	区间长度	点估计	95%区间估计	区间长度
β	1.200 9	[0.827 7, 1.742 3]	0.914 6	1.200 9	[0.801 4, 1.695 2]	0.893 8
λ	$8.060 0 \times 10^{-4}$	$[5.190 0 \times 10^{-4}, 1.250 0 \times 10^{-3}]$	$7.310 0 \times 10^{-4}$	$8.060 0 \times 10^{-4}$	$[4.790 0 \times 10^{-4}, 1.230 0 \times 10^{-3}]$	$7.550 0 \times 10^{-4}$
t_{MTBF}	354.550 0	—	—	354.550 0	[252.320 0, 586.840 0]	334.520 0
$R(t_{MTBF})$	0.395 0	[0.236 8, 0.549 0]	0.312 2	0.395 0	[0.248 2, 0.560 2]	0.312 0
$t_w(0.9)$	57.880 0	[26.910 0, 124.470 0]	97.560 0	57.880 0	[21.830 0, 108.290 0]	86.460 0

表 3 参数无信息先验或部分信息先验贝叶斯可靠性分析结果

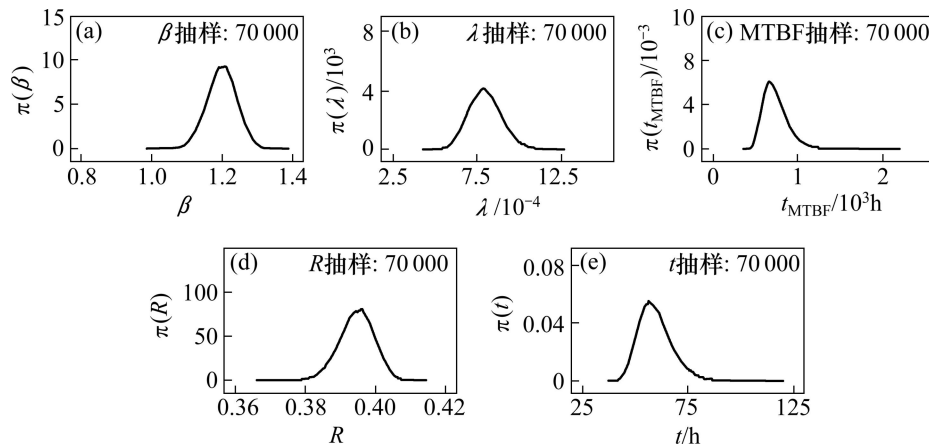
Table 3 Results of reliability analyses with noninformative prior and partly informative prior for parameters

变量	参数无信息先验			参数部分信息先验		
	均值	95%区间估计	区间长度	均值	95%区间估计	区间长度
β	1.527 0	[1.017 0, 2.119 0]	1.102 0	1.245 0	[0.831 9, 1.730 0]	0.898 1
λ	$3.600 0 \times 10^{-4}$	$[3.010 0 \times 10^{-6}, 2.260 0 \times 10^{-3}]$	$2.300 0 \times 10^{-3}$	$1.360 0 \times 10^{-3}$	$[3.300 0 \times 10^{-5}, 6.990 0 \times 10^{-3}]$	$6.960 0 \times 10^{-3}$
t_{MTBF}	367.400 0	[270.200 0, 522.800 0]	252.600 0	375.900 0	[258.400 0, 584.800 0]	326.400 0
$R(t_{MTBF})$	0.422 8	[0.370 5, 0.461 6]	0.091 1	0.396 2	[0.337 9, 0.440 7]	0.102 8
$t_w(0.9)$	90.780 0	[41.350 0, 147.800 0]	106.450 0	64.000 0	[24.650 0, 113.700 0]	89.050 0

表 4 参数信息先验贝叶斯可靠性分析结果

Table 4 Bayesian reliability analysis results with parameter informative prior

变量	均值	标准方差	仿真误差	2.5%分位数	中位数	97.5%分位数	过渡期	抽样数	区间长度
β	1.200 0	0.043 1	$2.840 0 \times 10^{-4}$	1.113 0	1.201 0	1.282 0	1 000	70 000	0.169 0
λ	$8.000 0 \times 10^{-4}$	$9.890 0 \times 10^{-5}$	$5.290 0 \times 10^{-7}$	$6.190 0 \times 10^{-4}$	$7.960 0 \times 10^{-4}$	$1.000 0 \times 10^{-3}$	1 000	70 000	$3.860 0 \times 10^{-4}$
t_{MTBF}	371.400 0	77.930 0	0.460 0	256.100 0	359.400 0	556.400 0	1 000	70 000	300.300 0
$R(t_{MTBF})$	0.394 7	$5.080 0 \times 10^{-3}$	$3.360 0 \times 10^{-5}$	0.384 0	0.394 9	0.403 9	1 000	70 000	0.019 9
$t_w(0.9)$	59.630 0	8.240 0	0.040 0	46.460 0	58.640 0	78.600 0	1 000	70 000	32.140 0



(a) 形状参数密度; (b) 尺度参数密度; (c) 平均无故障工作时间密度; (d) 任务可靠度密度; (e) 工作保证时间密度

图 1 参数及可靠性指标后验抽样密度

Fig. 1 Posterior densities for parameters and reliability indices

时也表明, 参数在无信息先验或部分信息先验的情况下, 贝叶斯估计优势不明显, 个别估计精度甚至低于极大似然估计。

3 结论

1) 贝叶斯可靠性分析因结合先验信息, 其分析结果优于极大似然估计和似然比检验估计。在数控机床少样本故障数据的可靠性分析中, 应用贝叶斯方法, 可减少模型的不确定性, 提高分析的准确度。

2) 在数控机床贝叶斯可靠性分析中, 应充分利用先验信息选取先验分布, 抛弃有用先验信息, 而采用无信息先验分布的做法是不可取的。

参考文献:

- [1] WANG Yiqiang, JIA Yazhou, JIANG Weiwei. Early failure analysis of machining centers: A case study[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2001, 72: 91-97.
- [2] DAI Yi, ZHOU Yifei, JIA Yazhou. Distribution of time between failures of machining center based on type I censored data[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2003, 79(3): 375-377.
- [3] 王智明, 杨建国, 王国强, 等. 多台数控机床的时间截尾可靠性评估[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(3): 85-89. WANG Zhiming, YANG Jianguo, WANG Guoqiang, et al. Reliability evaluation of multiple NC machine tools with time truncation[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2011, 43(3): 85-89.
- [4] 杨建国, 王智明, 王国强, 等. 数控机床可靠性指标的似然比检验区间估计[J]. 机械工程学报, 2012, 48(2): 9-15. YANG Jianguo, WANG Zhiming, WANG Guoqiang, et al. Likelihood ratio test interval estimation of reliability indices for numerical control machine tools[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(2): 9-15.
- [5] Hamada M S, Wilson A, Reese C S, et al. Bayesian reliability, springer series in statistics[M]. New York: Springer, 2010: 110-122.
- [6] Gupta A, Mukherjee B, Upadhyay S K. Weibull extension model: A Bayes study using Markov chain Monte Carlo simulation[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2008, 93(10): 1434-1443.
- [7] Jiang H, Xie M, Tang L C. Markov chain Monte Carlo methods for parameter estimation of the modified Weibull distribution[J]. Journal of Applied Statistics, 2008, 35(6): 647-658.
- [8] Jaheen Z F, Harbi M M A. Bayesian estimation for the exponentiated Weibull model via Markov Chain Monte Carlo simulation[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2011, 40(4): 532-543.
- [9] Spiegelhalter D, Thomas A, Best N, et al. WinBUGS User Manual, Version 1.4[M]. UK: MRC Biostatistics Unit, 2003: 1-44.
- [10] Ntzoufras I. Bayesian Modeling Using WinBUGS[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 2009: 31-124.
- [11] 谷东伟, 申桂香, 张英芝, 等. 数控机床主轴系统可靠性评价[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2013, 44(2): 540-545. GU Dongwei, SHEN Guixiang, ZHANG Yingzhi, et al. Reliability evaluation of spindle system of CNC[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2013, 44(2): 540-545.
- [12] 朱德馨, 刘宏昭. 极小样本下高速列车轴承的可靠性评估[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2013, 44(3): 963-969. ZHU Dexin, LIU Hongzhao. Reliability evaluation of high-speed train bearing with minimum sample[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2013, 44(3): 963-969.
- [13] 程皖民, 冯静, 周经伦, 等. Weibull分布航天产品可靠性评估的MMLE-Bayes方法[J]. 电讯技术, 2006, 46(6): 22-27. CHENG Wanmin, FENG Jing, ZHOU Jinglun, et al. MMLE-Bayes reliability assessment method for aerospace products with Weibull distribution[J]. Telecommunication Engineering, 2006, 46(6): 22-27.
- [14] 金光, 冯静. 长寿命卫星活动部件 Bayes-Weibull 可靠性评估方法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(8): 2020-2023. JIN Guang, FENG Jing. Bayes-Weibull reliability assessment method for long life satellite moving components[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(8): 2020-2023.
- [15] 陈文华, 崔杰, 潘俊, 等. 威布尔分布下失效率的 Bayes 验证试验方法[J]. 机械工程学报, 2005, 41(12): 118-121. CHEN Wenhua, CUI Jie, PAN Jun, et al. Bayesian demonstration test method for failure rate under Weibull distribution[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(12): 118-121.

(编辑 陈爱华)