

连续排水边界条件下饱和软土一维大变形固结解析解

江文豪^{1,2}, 詹良通^{1,2}, 杨策³

- (1. 浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州, 310058;
2. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州, 310058;
3. 杭州绿农环境工程有限公司, 浙江 杭州, 310000)

摘要: 基于 XIE 等提出的饱和软土一维大变形固结的假设, 通过引入连续排水边界条件研究瞬时荷载下饱和软土的一维大变形固结问题。利用变量代换、分离变量法和 Laplace 变换得到连续排水边界条件下饱和软土一维大变形固结解析解, 通过退化解析解和有限差分数值解对比分析, 对该解析解的正确性进行验证。基于所得解析解, 分析土体的界面参数及荷载参数对土体一维大变形固结性状的影响。研究结果表明: 界面参数 α 和 β 越大, 土体的透水性越好, 超孔隙水压力消散越快, 地基的固结速度越快; 当界面参数增大到一定程度后, 连续排水边界可退化为完全排水边界; 连续排水边界下以孔压定义的固结度 U_p 随荷载参数 λ_q 的增大而减小, 以沉降定义的固结度 U_s 则随荷载参数 λ_q 的增大而增大; 对比土体的界面参数和荷载参数对土体大变形固结的影响可知, 界面参数对土体固结的影响更大。

关键词: 连续排水边界; 大变形固结; 界面参数; 荷载参数; 解析解

中图分类号: TU443

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



文章编号: 1672-7207(2020)05-1289-10

Analytical solution for one-dimensional large strain consolidation of saturated soft soils with continuous drainage boundary

JIANG Wenhao^{1,2}, ZHAN Liangtong^{1,2}, YANG Ce³

- (1. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;
2. Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering of Ministry of Education, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;
3. Hangzhou Lvrong Environment Engineering Co. Ltd., Hangzhou 310000 China)

Abstract: Based on the assumptions of one-dimensional large strain consolidation proposed by XIE et al, the one-dimensional large strain consolidation problems of saturated soft soils under instant loading were investigated by introducing the continuous drainage boundary. An analytical solution of one-dimensional large strain consolidation of saturated soft soils with continuous drainage boundary was obtained by using variable substitution, the separation variable method and Laplace transformation. The correctness of the analytical solution was verified by the comparison of degenerated analytical solution and finite difference numerical solution. Based on the analytical

收稿日期: 2019-11-11; 修回日期: 2020-01-10

基金项目(Foundation item): 浙江省重点研发计划项目(2019C03107) (Project(2019C03107) supported by the Key Research and Development Program of Zhejiang Province)

通信作者: 詹良通, 博士, 教授, 从事非饱和土力学、环境岩土工程和边坡工程等研究; E-mail: zhanlt@zju.edu.cn

solution, the influences of interface parameters and loading parameters of the soils on the one-dimensional large strain consolidation behaviors of soils were analyzed. The results show that the larger the interface parameters (α and β) of the soils, the better the water permeability of the soils, the faster the dissipation of the excess pore water pressure, and the faster the consolidation speed of the soils; when the interface parameters increase to a certain extent, the continuous drainage boundary can be degraded to complete drainage boundary. The consolidation degree U_p defined by the pore water pressure with the continuous drainage boundary decreases with the increase of the loading parameters λ_q , and the consolidation degree U_s defined by the settlement increases with the increase of the loading parameters λ_q values. Comparing the influence of interface parameters and loading parameters of the soils on the large strain consolidation of saturated soft soils, the interface parameters have greater influence on the consolidation of saturated soft soils.

Key words: continuous drainage boundary; large strain consolidation; interface parameters; loading parameters; analytical solution

自 20 世纪 20 年代土体一维固结理论建立以来^[1], 国内外学者通过对其基本假定进行修正, 不断发展和完善了一维固结理论。土体的一维大变形固结理论起始于 20 世纪中期, GIBSON 等^[2]以孔隙比为变量推导得到了土体一维大变形固结的控制方程, 但由于控制方程的高度非线性, 无法直接求得解析解。POSKITT^[3]基于 GIBSON 大变形固结理论, 孔隙比 e 与土体的有效应力和渗透系数 k_v 采用线性的 $e - \lg \sigma'$ 和 $e - \lg k_v$ 关系描述土体固结过程中压缩性和渗透性的变化, 利用摄动法得到了土体一维大变形固结解析解。GIBSON 等^[4]假定 GIBSON 大变形固结理论控制方程中的固结系数与重力系数均为常数, 采用有限差分法分析了不同条件下土体一维大变形固结性状。MCVAY 等^[5]基于 GIBSON 大变形固结理论, 并假定中土体固结过程压缩性关系与渗透性关系均满足指数变化规律, 对土体的固结性状进行了讨论。谢新宇等^[6-7]基于连续介质力学的基本原理, 建立了以位移为控制变量的一维大变形固结方程, 并研究了渗透系数变化对土体一维大变形固结性状的影响。张继发等^[8]根据混合物理论, 推导了土体一维大应变固结方程, 并应用李群变换的方法获得了某些特定条件下控制方程的隐式解答。XIE 等^[9]通过假定体积压缩系数为常数, 渗透系数与孔隙比的平方成正比, 得到了饱和软土一维大变形固结的解析解。吴健等^[10]基于 GIBSON 大变形理论的控制方程, 考虑土体的渗透系数和孔隙比、有效应力和孔隙比之间的非线性关系, 分析了不同渗透指数与压缩指数的比值下软土的固结特性。李传勋

等^[11-12]考虑非 DARCYLEY 渗流定律, 在拉格朗日坐标系下建立了以超孔隙水压力为变量的土体一维大应变固结方程, 并运用有限差分法进行求解。但以上关于一维大变形固结理论的研究对象主要集中在土体压缩特性和渗透特性, 对土体排水边界随时间发展过程的研究还不够深入。传统排水边界条件主要包括完全透水边界和完全不透水边界。此外, 也有学者对半透水边界条件进行了研究。早在 20 世纪 40 年代, GRAY^[13]对半透水边界进行了研究。SCHIFFMAN 等^[14]研究了半透水边界条件下, 渗透系数与体积压缩系数变化对土体固结的影响。谢康和等^[15-16]将半透水边界的运用推广到层状地基, 分析了层状土在半透水边界下的一维固结特性。李西斌等^[17]研究了双面半透水边界饱和土体在循环荷载作用下的黏弹性固结问题, 得到了半透水边界下黏弹性地基的解析解。然而, 传统排水边界与时间无关, 存在孔压突变为零的问题, 无法反映土体排水边界随着固结过程发展的变化情况。半透水边界虽然体现了透水边界的变化过程, 但其物理意义并不明确, 无法定量描述界面排水能力^[18]。针对上述排水边界问题存在的不足, 梅国雄等^[19-20]提出了考虑边界孔压随时间指数衰减的连续排水边界条件, 并给出了相应的瞬时加载条件下一维固结方程的理论解答。宗梦繁等^[21]对连续排水边界条件下土体非线性固结性状进行了研究; 童立红等^[22]对连续排水边界条件下黏弹性地基的固结性状进行了分析。但以上基于连续排水边界的固结研究中均未对土体的大变形固结性状进行研究, 而实际工程中常常会遇到土体的大变形

固结问题。基于此, 本文作者首先基于 XIE 等^[9]饱和软土一维大变形固结的假设, 通过引入连续排水边界条件研究饱和软土的一维大变形固结问题, 并得到连续排水边界下饱和软土一维大变形固结的解析解。然后, 通过退化解析解和有限差分数值解对比分析, 对该解析解的正确性进行了验证。最后, 基于所得解析解, 分析界面参数及荷载参数对土体一维大变形固结性状的影响。

1 基本问题

本文采用 XIE 等^[9]提出的饱和软土一维大变形固结问题中的基本假定, 饱和软土的渗透系数 k_v 与孔隙比 e 有如下关系式:

$$\frac{k_v}{k_{v0}} = \left(\frac{1+e}{1+e_0} \right)^2 \quad (1)$$

式中: k_{v0} 和 e_0 分别为土体的初始渗透系数和初始孔隙比。

在饱和软土固结过程中, 假定土体的体积压缩系数 m_{v1} 保持不变^[9], 即

$$m_{v1} = -\frac{1}{1+e} \frac{de}{d\sigma'} = C \quad (2)$$

式中: σ' 为土体的有效应力; C 为常数。

根据上述假定, 土体的固结系数 C_v 可表示为

$$C_v = \frac{k_v}{\gamma_w m_v} = \left(\frac{1+e}{1+e_0} \right)^2 \frac{k_{v0}}{\gamma_w m_{v1}} = \left(\frac{1+e}{1+e_0} \right)^2 C_{v0} \quad (3)$$

式中: C_{v0} 为土体的初始固结系数; γ_w 为水的重度; m_v 为体积压缩系数。

在大变形固结过程中, 由于土体会产生较大的变形, 因此通常采用拉格朗日坐标系进行度量。根据上述假定, 可推导得到饱和软土固结过程中以超孔隙水压力 u 为变量在拉格朗日坐标下的控制方程^[9]为

$$C_{v0} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + m_{v1} \left(\frac{\partial u}{\partial a} \right)^2 \right] = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 \leq a \leq H \quad (4)$$

式中: a 为拉格朗日坐标系下的竖向方向; t 为时间; H 为饱和土体的初始厚度。

根据梅国雄等^[19-20]提出的连续排水条件, 该一维大变形固结方程的求解条件如下。

初始条件:

$$u(a,0) = q_u \quad (5)$$

式中: q_u 为瞬时施加的均布荷载。

边界条件:

$$\begin{cases} u(0,t) = q_u \exp \left[-\alpha \frac{C_{v0} t}{H^2} \right] \\ u(H,t) = q_u \exp \left[-\beta \frac{C_{v0} t}{H^2} \right] \end{cases} \quad (6)$$

式中: α 和 β 为反映土体顶面和底面排水性状的界面参数; 该值可以通过试验模拟或者实测边界处孔压随时间的变化曲线反分析得到。

2 连续排水条件下饱和软土大变形固结的量纲一的解答

为了便于控制方程的求解, 定义如下量纲一的变量和参数: $\bar{u} = \frac{u}{q_u}$; $Z = \frac{a}{H}$; $T_v = \frac{C_{v0} t}{H^2}$; $\lambda_q =$

$m_{v1} q_u$ 。

将量纲一参数代入式(4)中可得固结方程的表达式为

$$\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} + \lambda_q \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \right)^2 \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial T_v}, 0 \leq Z \leq 1 \quad (7)$$

初始条件为

$$\bar{u}(Z,0) = 1 \quad (8)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \bar{u}(0,T_v) = e^{-\alpha T_v} \\ \bar{u}(1,T_v) = e^{-\beta T_v} \end{cases} \quad (9)$$

令 $w = \exp(\lambda_q \bar{u}) - 1$, 则

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda_q} \ln(w+1) \quad (10)$$

代入式(7), 则固结方程和求解条件可以改写为

$$\frac{\partial w}{\partial T_v} = \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} \quad (11)$$

初始条件为

$$w(Z,0) = \exp(\lambda_q) - 1 \quad (12)$$

边界条件为

$$\begin{cases} w(0,T_v) = w_\alpha(T_v) \\ w(1,T_v) = w_\beta(T_v) \end{cases} \quad (13)$$

其中: $w_\xi(T_v) = \exp(\lambda_q e^{-\xi T_v}) - 1$ 。

为了进一步将边界条件齐次化, 令

$$v = w - w_\alpha(T_v) - Z[w_\beta(T_v) - w_\alpha(T_v)] \quad (14)$$

将式(14)代入式(10)可得

$$\frac{\partial v}{\partial T_v} = \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} + f(Z, T_v) \tag{15}$$

其中:

$$f(Z, T_v) = -Z \left(\frac{dw_\beta}{dT_v} - \frac{dw_\alpha}{dT_v} \right) - \frac{dw_\alpha}{dT_v} \tag{16}$$

$$\frac{dw_\xi}{dT_v} = -\lambda_q \xi e^{-\xi T_v} \exp(\lambda_q e^{-\xi T_v}) \tag{17}$$

相应的初始条件变为

$$v(Z, 0) = 0 \tag{18}$$

相应的边界条件变为

$$\begin{cases} v(0, T_v) = 0 \\ v(1, T_v) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

对控制方程式(15)和初始条件式(18)采用有限正弦傅里叶变换, 再根据边界条件式(19), 有

$$v_n'(T_v) + (n\pi)^2 v_n(T_v) - f_n(T_v) = 0 \tag{20}$$

$$v_n(0) = 0 \tag{21}$$

式中:

$$v_n(T_v) = 2 \int_0^1 v(Z, T_v) \sin(n\pi Z) dZ \tag{22}$$

$$f_n(T_v) = 2 \int_0^1 f(Z, T_v) \sin(n\pi Z) dZ \tag{23}$$

其中: $n = 1, 2, 3, \dots$

根据正弦傅里叶级数可求得:

$$\begin{aligned} f_n(T_v) &= 2 \int_0^1 f(Z, T_v) \sin(n\pi Z) dZ = \\ &\lambda_q \alpha e^{-\alpha T_v} \cdot \exp(\lambda_q e^{-\alpha T_v}) \frac{2}{n\pi} - \\ &\lambda_q \beta e^{-\beta T_v} \cdot \exp(\lambda_q e^{-\beta T_v}) \frac{2 \cdot (-1)^n}{n\pi} = \\ &\frac{2\alpha}{n\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_q)^k}{(k-1)!} e^{-\alpha k T_v} - \frac{2\beta \cdot (-1)^n}{n\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_q)^k}{(k-1)!} e^{-\beta k T_v} \end{aligned} \tag{24}$$

式(24)中对 T_v 取 Laplace 变换, 则有

$$L[v_n(T_v)] = V_n(s) \tag{25}$$

式中: $L[v_n(T_v)]$ 为对括号内得函数求 Laplace 变换; $V_n(s)$ 为 $v_n(T_v)$ 的 Laplace 变换式; s 为 Laplace 变换参数。

结合初始条件, 可得

$$L[v_n'(T_v)] = sV_n(s) - v_n(0) = sV_n(s) \tag{26}$$

$$L[f_n(T_v)] = F_n(s) \tag{27}$$

将式(25)~(27)代入式(20), 可得

$$sV_n(s) + (n\pi)^2 V_n(s) = F_n(s) \tag{28}$$

由式(28)可得

$$V_n(s) = \frac{F_n(s)}{s + (n\pi)^2} \tag{29}$$

对式(29)求 Laplace 逆变换, 可得

$$\begin{aligned} v_n(T_v) &= \int_0^{T_v} f_n(\tau) e^{-(n\pi)^2(T_v - \tau)} d\tau = \\ &\frac{2}{n\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} [e^{-\alpha k T_v} - e^{-(n\pi)^2 T_v}] - \\ &\frac{2 \cdot (-1)^n}{n\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} [e^{-\beta k T_v} - e^{-(n\pi)^2 T_v}] \end{aligned} \tag{30}$$

其中:

$$A_{1k} = \frac{\alpha}{[(n\pi)^2 - k\alpha]} \frac{(\lambda_q)^k}{(k-1)!} \tag{31}$$

$$A_{2k} = \frac{\beta}{[(n\pi)^2 - k\beta]} \frac{(\lambda_q)^k}{(k-1)!} \tag{32}$$

将式(30)代入式(22), 可得

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(T_v) \sin(n\pi Z) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} [e^{-\alpha k T_v} - e^{-(n\pi)^2 T_v}] \right] \sin(n\pi Z) - \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot (-1)^n}{n\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} [e^{-\beta k T_v} - e^{-(n\pi)^2 T_v}] \right] \sin(n\pi Z) \end{aligned} \tag{33}$$

再根据式(10)和式(14), 可得 \bar{u} 的表达式为

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\lambda_q} \cdot \\ &\ln \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} [e^{-\alpha k T_v} - e^{-(n\pi)^2 T_v}] \right] \sin(n\pi Z) - \right. \\ &\left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot (-1)^n}{n\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} [e^{-\beta k T_v} - e^{-(n\pi)^2 T_v}] \right] \sin(n\pi Z) + \right. \\ &\left. \exp(\lambda_q e^{-\alpha T_v}) + Z [\exp(\lambda_q e^{-\beta T_v}) - \exp(\lambda_q e^{-\alpha T_v})] \right\} \end{aligned} \tag{34}$$

根据饱和软土一维大变形固结理论, 土体沉降量的表达式为

$$\begin{aligned} S_t &= H \int_0^1 [1 - \exp(-\lambda_q) \exp(\lambda_q \bar{u})] dZ = \\ &H - H \exp(-\lambda_q) \cdot \\ &\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A_{3k}}{(2n-1)^2 \pi^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A_{4k}}{(2n-1)^2 \pi^2} \right] + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} [\exp(\lambda_q e^{-\beta T_v}) + \exp(\lambda_q e^{-\alpha T_v})] \right\} \end{aligned} \tag{35}$$

其中:

$$A_{3k} = \frac{\alpha [e^{-\alpha k T_v} - e^{-(2n-1)^2 \pi^2 T_v}]}{[(2n-1)^2 \pi^2 - k\alpha]} \frac{(\lambda_q)^k}{(k-1)!} \tag{36}$$

$$A_{4k} = \frac{\beta [e^{-\beta k T_v} - e^{-(2n-1)^2 \pi^2 T_v}]}{[(2n-1)^2 \pi^2 - k\beta]} (\lambda_q)^k \quad (37)$$

而土体的最终沉降量为

$$S_\infty = \int_0^H [1 - \exp(-\lambda_q) \exp(\lambda_q \bar{u})] da = H [1 - \exp(-\lambda_q)] \quad (38)$$

因此, 按沉降定义的固结度 U_s 可表达为

$$U_s = S_t / S_\infty = \left\{ 1 - \exp(-\lambda_q) \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A_{3k}}{(2n-1)^2 \pi^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A_{4k}}{(2n-1)^2 \pi^2} \right] \right] + \frac{1}{2} \left[\exp(\lambda_q e^{-\beta T_v}) + \exp(\lambda_q e^{-\alpha T_v}) \right] \right\} / [1 - \exp(-\lambda_q)] \quad (39)$$

按孔压定义的固结度 U_p 可表达为

$$U_p = \frac{\int_0^H q_u \bar{u} da}{\int_0^H q_u da} = 1 - \int_0^1 \bar{u} dZ \quad (40)$$

3 解的验证

XIE 等^[9]求解出饱和软土单面排水条件下一维大变形固结的解答。其求解得到的超孔隙水压力 u 和按沉降定义的固结度 U_s 的表达式分别为:

$$u = \frac{q_u}{\lambda_q} \ln \left\{ 1 + [\exp(\lambda_q) - 1] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{Ma}{H}\right) \exp(-M^2 T_v) \right\} \quad (41)$$

$$U_s = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T_v) \quad (42)$$

其中: $T_v = \frac{C_{v0} t}{H^2}$; $M = \frac{(2m-1)}{2} \pi$; $m = 1, 2, 3, \dots$ 。

与经典的 Terzaghi 一维固结理论相比, 式(41)中超孔隙水压力 u 不仅受时间因数 T_v 的影响, 还与无量纲参数 λ_q 有关, 因此, 参数 λ_q 是反映土体大变形固结的参数。由定义可知 $\lambda_q = m_{v1} q_u$, 根据上述假定, 土体的体积压缩系数 m_{v1} 在固结过程中保持不变, 因此, λ_q 主要受外荷载 q_u 的影响。在这里, 可称参数 λ_q 为荷载参数。

实际上, 只需用 $H/2$ 代替上面的 H 即可得到对应的 XIE 等^[9]双面排水条件下的一维大变形固结解答, 其表达式如下:

$$u = \frac{q_u}{\lambda_q} \cdot$$

$$\ln \left\{ 1 + [\exp(\lambda_q) - 1] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{2Ma}{H}\right) \cdot \exp(-4M^2 T_v) \right\} \quad (43)$$

$$U_s = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-4M^2 T_v) \quad (44)$$

当 $\alpha \rightarrow \infty$ 和 $\beta \rightarrow \infty$ 时, 基于连续排水边界所得的解答将退化为 XIE 等^[9]双面排水解答, 此时,

$$w_\alpha(T_v) = w_\beta(T_v) = 0 \quad (45)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(T_v) \sin(n\pi Z) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{(2n-1)\pi} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 T_v} \right] \cdot [\exp(\lambda_q) - 1] \sin[(2n-1)\pi Z] \quad (46)$$

代入式(10)和式(14)可得

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda_q} \ln \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{(2n-1)\pi} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 T_v} \right] \cdot [\exp(\lambda_q) - 1] \sin[(2n-1)\pi Z] + 1 \right\} \quad (47)$$

因此,

$$u = \frac{q_u}{\lambda_q} \cdot$$

$$\ln \left\{ [\exp(\lambda_q) - 1] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2Ma}{H}\right) \cdot \frac{2}{M} e^{-4M^2 T_v} + 1 \right\} \quad (48)$$

对比可知, 退化后的超孔隙水压力 u 的表达式与 XIE 等^[9]得到的双面排水一维大变形固结下超孔隙水压力 u 的表达式一致。

同样, 将式(48)代入式(39)可求得按沉降定义的平均固结度 U_s 的表达式如下:

$$U_s = \frac{\int_0^H [1 - \exp(-\lambda_q) \exp(m_{v1} u)] da}{H [1 - \exp(-\lambda_q)]} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-4M^2 T_v) \quad (49)$$

与式(44)对比可知, 退化后的沉降固结度与 XIE 等^[9]得到的双面排水条件下按沉降定义的固结度表达式一致。根据退化解析解, 可以初步验证连续排水边界条件下饱和软土一维大变形固结解析解的正确性。而根据式(42)和式(44)可知, XIE 等^[9]得到的单面及双面排水下 U_s 解答只与时间因数 T_v 有关。而式(39)中, 基于连续排水边界求解的 U_s 不仅与 T_v 有关, 而且与荷载参数 λ_q 及界面参数 α 和

β 有关。

为进一步验证上述解答的正确性, 对式(7)展开有限差分, 利用相应的边界条件和初始条件进行有限差分求解, 并将本文解答与有限差分数值解进行对比。假定软土地基在自重及初始荷载 $q_0 = 10 \text{ kPa}$ 作用下变形已稳定, 取与 XIE 等^[9]研究相同的计算参数($\lambda_q = 0.4$), 其参数如表 1 所示。为使对比结果具有一般性, 取界面参数 $\alpha = 2, \beta = 1$ 。图 1 所示为 2 种方法下沉降固结度 U_s 随时间因数 T_v 的变化。从图 1 可以看出: 本文的解析解与有限差分数值解吻合较好。

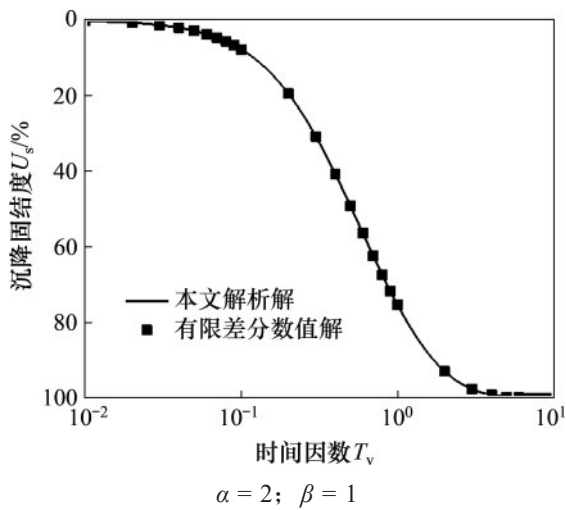


图 1 本文解析解与有限差分数值解比较

Fig. 1 Comparison between analytical solution and finite difference fractional solutions

4 固结性状分析

4.1 α 和 β 取值对固结性状的影响

界面参数 α 和 β 对土体的大变形固结过程有着重要影响。以表 1 中的地基参数为例, 图 2 和图 3 所示为界面参数对土体孔压的影响曲线。从图 2 可以看出: 界面参数 α 和 β 越大, 排水边界处的透水性越好, 超孔隙水压力消散越快, 地基固结速率

也越快; 当 $\alpha/\beta = 1$ 时, 超孔隙水压力沿相对深度的分布于 $a/H = 0.5$ 处对称。当 α/β 逐渐增大时, 超孔隙水压力峰值逐渐下移, 且超孔隙水压力峰值逐渐减小。因此, 不同界面参数可模拟土层顶部与底面排水的不同性能。从图 3 可以看出: 当 α/β 大于 1 时, 上半层土的曲线斜率要明显大于下半层土的曲线斜率, 这说明土层顶面的排水速率高于土层底面的排水速率。因此, 可以认为界面参数 α 或 β 越大, 其对应的那半层土的排水速度也就较快。此外, 随着时间因数 T_v 的增大, 超孔隙水压力峰值逐渐向较小界面参数值对应面移动。

XIE 等^[9]研究指出, 饱和软土一维大变形固结理论中以孔压定义的固结度 U_p 和以沉降定义的固结度 U_s 存在差异, 因此, 有必要分别讨论界面参数对孔压固结度和沉降固结度的影响。图 4 所示为界面参数 α 和 β 对孔压固结度 U_p 的影响。图 4 中曲线 4 和 5 分别为 XIE 等^[9]得到的单面排水及双面排水的固结度曲线。对比基于连续排水边界条件得到的孔压固结度与 XIE 等^[9]得到的双面排水孔压固结度可以看出: α 和 β 越大, 超孔隙水压力消散越快, 其结果也越来越接近 XIE 等^[9]得到的双面排水下孔压固结度的解答。从图 4 还可以得出: 当 α 和 β 较小时, 在固结初期, 连续排水边界条件下的孔压固结度明显低于 XIE 等^[9]得到的单面排水条件下的孔压固结度, 但在中后期, 其结果高于 XIE 等^[9]得到的单面排水条件下的孔压固结度, 这主要是由于传统排水边界条件不具连续性。当 α 和 β 较大时, 尽管在初期连续排水边界条件的孔压固结度与 XIE 等^[9]得到的双面排水下孔压固结度存在较大差异, 但 2 种情况下完全固结所需时间几乎相同。这说明, 当排水边界界面参考连续排水边界模型进行设计时, 虽然固结初期排水速率较慢, 但最终固结时间基本不受影响。

图 5 所示为界面参数 α 和 β 对沉降固结度 U_s 的影响。当沉降固结度 $U_s = 90\%$ 时, 一般可认为沉降

表 1 软土地基的计算参数

Table 1 Calculation parameters of soft soil foundation

相对密度 G_s	初始高度 H/m	初始孔隙比 e_{00}	施加荷载 q_v/kPa	初始渗透系数 $k_{v0}/(m \cdot s^{-1})$	体积压缩系数 m_{v1}/MPa^{-1}
2.75	10	3.0	100	1.0×10^{-9}	4

注: 初始孔隙比 e_{00} 指软土地基在自重及初始荷载作用下变形已稳定后的表层孔隙比。

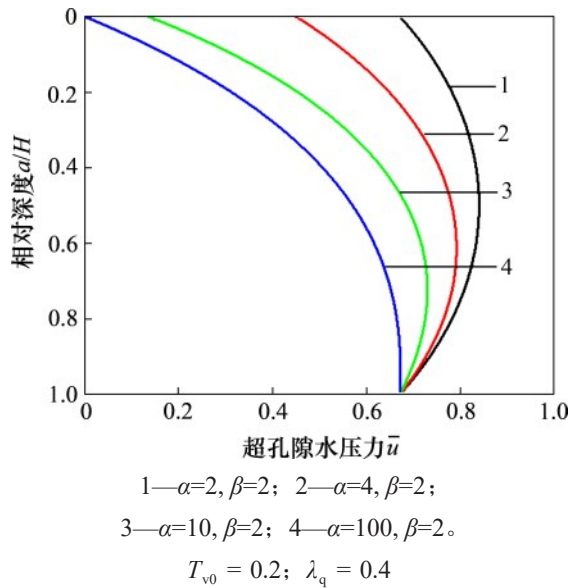


图 2 界面参数对超孔隙水压力分布的影响

Fig. 2 Influence of interface parameters on excess pore water pressure distribution curves

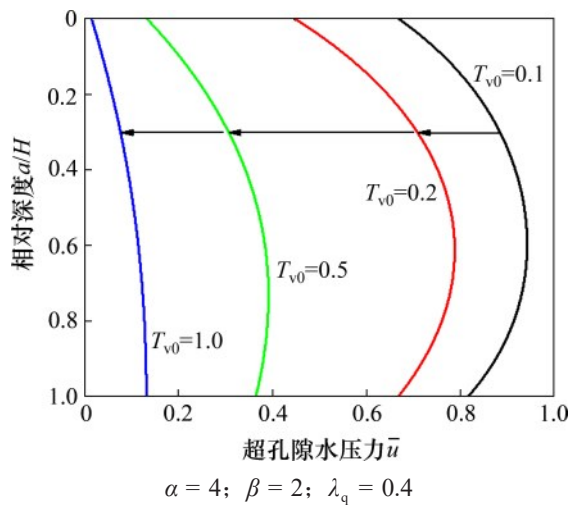


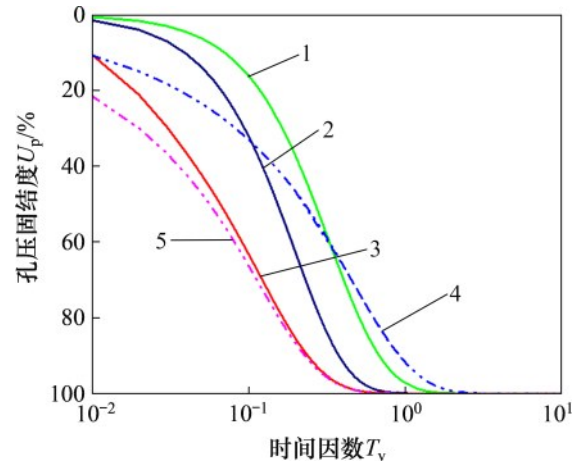
图 3 超孔隙水压力随时间因数 T_v 的变化

Fig. 3 Variation of excess pore water pressure with time factor T_v

已趋于稳定, 此时的时间因数定义为 T_{v90} 。对于连续排水边界, 当 β 固定为 2, α 为 4, 10 和 100 时的 T_{v90} 分别为 0.909, 0.826 和 0.822, XIE 等^[9]得到的单面及双面排水条件下的 T_{v90} 分别为 0.213 和 0.852。根据 T_{v90} 可以看出: 当土层一面排水界面参数较小时, 增大另一面界面参数对沉降稳定时的固结时间影响不大, 且该沉降稳定时间与经典的单面排水下的稳定时间相近。

在实际工程中, 当排水边界参考连续排水边界模型进行设计时, 可以通过调整 α 和 β 设计实际

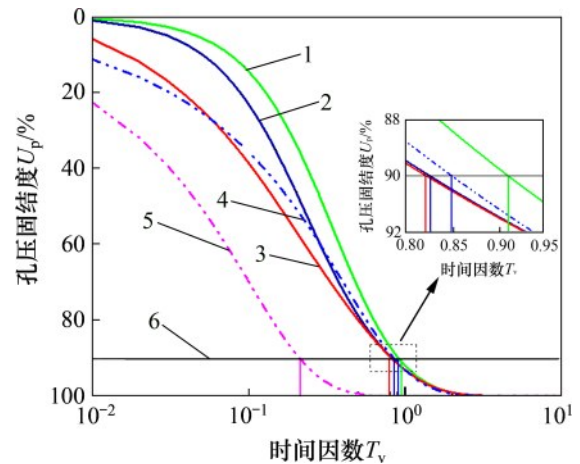
所需的固结排水速率。尽管理论上界面参数的取值是 0 到正无穷大^[19-20], 但从图 4 和图 5 可以看出, α 和 β 不用太大, 得到的固结曲线就能与 XIE 等^[9]单面及双面排水所得固结曲线相接近。



1— $\alpha=\beta=4, \lambda_q=0.4$; 2— $\alpha=\beta=10, \lambda_q=0.4$;
3— $\alpha=\beta=100, \lambda_q=0.4$; 4—单面排水; 5—双面排水。

图 4 界面参数对孔压固结度 U_p 的影响

Fig. 4 Influence of interface parameters on U_p



1— $\alpha=4, \beta=2, \lambda_q=0.4$; 2— $\alpha=10, \beta=2, \lambda_q=0.4$;
3— $\alpha=100, \beta=2, \lambda_q=0.4$; 4—单面排水;
5—双面排水; 6— $U_s=90\%$ 。

图 5 界面参数对孔压固结度 U_s 的影响

Fig. 5 Influence of interface parameters on U_s

4.2 λ_q 取值对固结性状的影响

根据上述分析可知, 荷载参数 λ_q 主要受外荷载 q_a 的影响。这里以表 1 中的地基参数为例, 外荷载 q_a 分别取 25, 50, 100 和 200 kPa, 以分析不同荷载参数 λ_q 对饱和软土大变形固结性状的影响。图 6 所示为不同 λ_q 下的孔压分布。从图 6 可以看出: λ_q 越大, 相同排水边界下超孔隙水压力的消散

速率越慢。图6中的孔压分布规律也进一步验证了当 $\alpha/\beta = 1$ 时,超孔隙水压力沿相对深度的分布于 $a/H = 0.5$ 处对称。图7所示为不同 λ_q 下连续排水边界退化后的孔压固结度 U_p 曲线。从图7可以看出:在同一时间因数下,孔压固结度随 λ_q 的增大而减小。从图6和图7可知:孔压消散速率随 λ_q 的增大而减小,这主要是由于外荷载 q_u 越大,土体的渗透系数 k_v 越小,进而降低了土体的孔压固结速率。此外,从图7还可以看出:当 α 和 β 取大值(如 $\alpha = \beta = 1\ 000$)时,基于连续排水边界条件得到的固结曲线和XIE等^[9]得到的双面排水条件下的固结曲线一致,即基于连续排水边界条件所得解答可以退化为XIE等^[9]得到的双面排水解答,这进一步验证了解答的正确性。

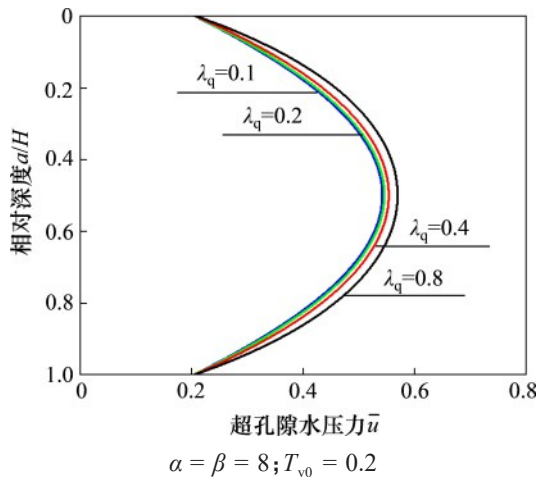


图6 λ_q 对超孔隙水压力分布的影响

Fig. 6 Influence of λ_q on excess pore water pressure distribution curves

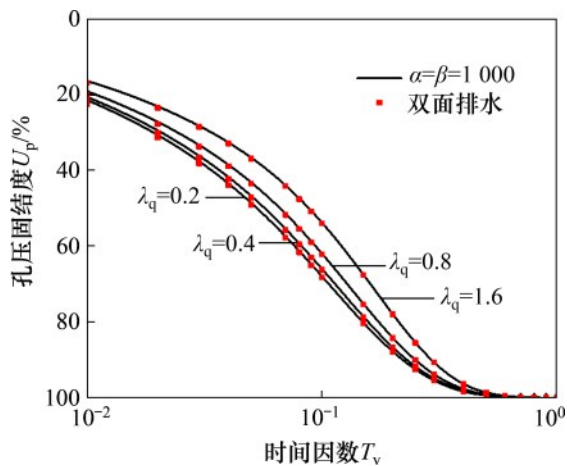
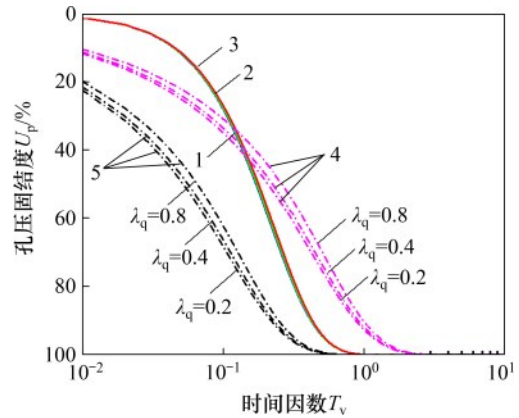


图7 连续排水边界退化后的 U_p 曲线

Fig. 7 U_p curves while continuous drainage boundary degenerated

图8所示为不同边界条件下荷载参数 λ_q 对孔压固结度 U_p 的影响。从图8可以看出:在不同排水边界下,孔压固结度均随着 λ_q 的增大而减小。对比连续排水边界和XIE等^[9]提出的单面或双面排水条件可知, λ_q 对连续排水边界下孔压固结度曲线的影响明显小于XIE等^[9]提出的单面及双面排水条件下的影响。在不同的 λ_q 下,连续排水边界下的孔压固结度曲线几乎重合,而XIE等^[9]得到的单面及双面排水条件下的孔压固结度曲线有明显差异。此外,与图4对比可知,相对于荷载参数 λ_q ,界面参数 α 和 β 对 U_p 曲线的影响更大。

图9所示为不同边界条件下荷载参数 λ_q 对沉降固结度 U_s 曲线的影响。在土体固结过程中,尽管

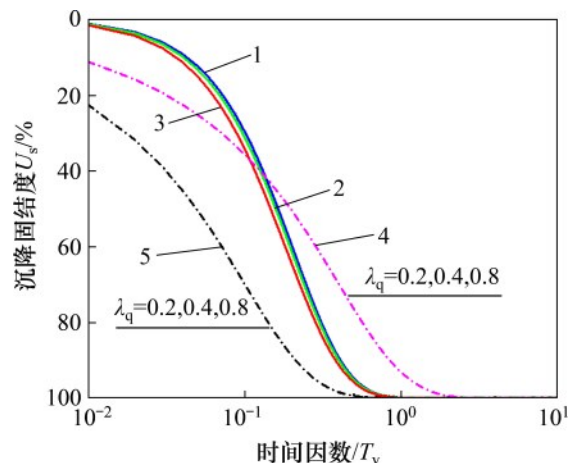


1— $\alpha = \beta = 8, \lambda_q = 0.2$; 2— $\alpha = \beta = 8, \lambda_q = 0.4$;

3— $\alpha = \beta = 8, \lambda_q = 0.8$; 4—单面排水; 5—双面排水。

图8 λ_q 对孔压固结度 U_p 的影响

Fig. 8 Influence of λ_q on U_p



1— $\alpha = \beta = 8, \lambda_q = 0.2$; 2— $\alpha = \beta = 8, \lambda_q = 0.4$;

3— $\alpha = \beta = 8, \lambda_q = 0.8$; 4—单面排水; 5—双面排水。

图9 λ_q 对沉降固结度 U_s 的影响

Fig. 9 Influence of λ_q on U_s

体积压缩系数 m_{v1} 不变,但由于固结过程中有效应力与孔隙比呈对数关系,土体具有越压越硬的特点,即土体的压缩系数 a_v 在固结过程中越来越小。在相同的孔压固结度下, λ_q 越大,压缩系数 a_v 越小,沉降固结度 U_s 则越大。从图9可以看出:当时间因数固定时, XIE 等^[9]得出的单面或双面排水条件下的沉降固结度 U_s 不随 λ_q 的变化而变化。这说明尽管固结过程中 k_v 的减小使得土体的沉降固结速率减小,但同时压缩系数 a_v 的减小使得沉降固结速率增大,两者的影响相互抵消使得沉降固结度 U_s 不随 λ_q 的变化而变化。在连续排水边界下,当时间因数固定时,沉降固结度 U_s 随 λ_q 的增大而增大,这与孔压固结度 U_p 随 λ_q 的变化趋势刚好相反。这说明连续排水边界下固结过程中 k_v 对沉降固结度 U_s 的影响小于压缩系数 a_v 对 U_s 的影响。

5 结论

1) 基于 XIE 等提出的饱和软土一维大变形固结方程的基本假定,推导得到了连续排水边界条件下饱和软土一维大变形固结的解析解。

2) 通过退化结果和有限差分数值解验证了本文解析解的合理性。退化结果表明所得的解析解是连续的,解答具有明确的物理意义。修正后的一维大变形固结方程可以通过调整界面参数 α 和 β 来近似模拟不同的排水性能。

3) 土体的界面参数 α 和 β 越大,土体的透水性越好,超孔隙水压力消散越快,地基的固结速度越快;当界面参数增大到一定程度(如 $\alpha = \beta = 1000$)后,连续排水边界可退化为完全排水边界。

4) 在不同排水边界条件下,孔压固结度 U_p 均随 λ_q 增大而减小,但连续排水边界下的孔压固结度 U_p 受 λ_q 的影响较小。完全排水条件下的沉降固结度 U_s 不受 λ_q 的影响,但连续排水边界条件下沉降固结度 U_s 随 λ_q 增大而增大。

5) 界面参数 α 和 β 对土体大变形固结的影响比荷载参数 λ_q 对土体大变形固结的影响大。在实际工程中,排水边界条件对土体固结的影响应得到重视。

参考文献:

- [1] TERZAGHI K. Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer grundlage[M]. Vienna: Leipzig Deuticke, 1925: 175-176.
- [2] GIBSON R E, ENGLAND G L, HUSSEY M J L. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays: I. finite non-linear consolidation of thin homogeneous layers[J]. Géotechnique, 1967, 17(3): 261-273.
- [3] POSKITT T J. The consolidation of saturated clay with variable permeability and compressibility[J]. Géotechnique, 1969, 19(2): 234-252.
- [4] GIBSON R E, SCHIFFMAN R L, CARGILL K W. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays: II. finite nonlinear consolidation of thick homogeneous layers [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1981, 18(2): 280-293.
- [5] MCVAY M, TOWNSEND F, BLOOMQUIST D. Quiescent consolidation of phosphatic waste clays[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1986, 112(11): 1033-1049.
- [6] 谢新宇,朱向荣,谢康和,等. 饱和土体一维大变形固结理论新进展[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(4): 30-38.
XIE Xinyu, ZHU Xiangrong, XIE Kanghe, et al. New development of saturated soil one-dimensional large-strain consolidation theories[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(4): 30-38.
- [7] 谢新宇,刘育民,潘秋元. 渗透系数变化对一维大变形固结性状的影响[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(4): 509-511.
XIE Xinyu, LIU Yumin, PAN Qiuyuan. Effects of variable permeability on one-dimensional large strain consolidation [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22 (4): 509-511.
- [8] 张继发,谢新宇,郑俊杰,等. 一维大应变固结理论的一类解析解[J]. 固体力学学报, 2003, 24(4): 384-390.
ZHANG Jifa, XIE Xinyu, ZHENG Junjie, et al. An analytical solution of one-dimensional finite strain consolidation theory[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2003, 24(4): 384-390.
- [9] XIE K H, LEO C J. Analytical solutions of one-dimensional large strain consolidation of saturated and homogeneous clays[J]. Computers & Geotechnics, 2004, 31(4): 301-314.
- [10] 吴健,谢新宇,朱向荣. 饱和土体一维复杂非线性固结特性研究[J]. 岩土力学, 2010, 31(1): 81-86.
WU Jian, XIE Xinyu, ZHU Xiangrong. Study of properties of 1-D complex nonlinear consolidation of saturated soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(1): 81-86.
- [11] 李传勋,谢康和. 指数形式渗流定律下软土非线性大变形固结分析[J]. 岩土力学, 2013, 34(10): 2991-2996, 3010.
LI Chuanxun, XIE Kanghe. Analysis of nonlinear large-strain consolidation of soft clay with exponential seepage

- flow law[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(10): 2991–2996, 3010.
- [12] 李传勋, 徐超, 谢康和. 基于起始水力坡降的软土一维大变形固结分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2015, 34(S1): 3525–3533.
- LI Chuanxun, XU Chao, XIE Kanghe. Analysis of one-dimensional large-strain consolidation of soft clay with threshold gradient[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, 34(S1): 3525–3533.
- [13] GRAY H. Simultaneous consolidation of contiguous layers of unlike compressible soils[J]. *Transactions of the American Society of Civil Engineering*, 1945, 110: 1327–1356.
- [14] SCHIFFMAN R L, STEIN J R. One-dimensional consolidation of layered systems[J]. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1970, 96(4): 1499–1504.
- [15] 谢康和. 层状土半透水边界一维固结分析[J]. *浙江大学学报(自然科学版)*, 1996, 30(5): 567–575.
- XIE Kanghe. On one dimensional consolidation behavior of layered soil with partial drainage boundaries[J]. *Journal of Zhejiang University (Natural Science)*, 1996, 30(5): 567–575.
- [16] XIE Kanghe, XIE Xinyu, GAO Xiang. Theory of one dimensional consolidation of two-layered soil with partially drained boundaries[J]. *Computers and Geotechnics*, 1999, 24(4): 265–278.
- [17] 李西斌, 谢康和, 王奎华, 等. 双面半透水边界饱和土层在循环荷载作用下的一维粘弹性固结解析解[J]. *工程力学*, 2004, 21(5): 103–108, 99.
- LI Xibin, XIE Kanghe, WANG Kuihua, et al. Analytical solution of 1D visco-elastic consolidation of soils with impeded boundaries under cyclic loadings[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(5): 103–108, 99.
- [18] 张驿, 吴文兵, 梅国雄, 等. 基于连续排水边界条件的砂井地基固结解析解[J]. *工程科学与技术*, 2019, 51(2): 90–97.
- ZHANG Yi, WU Wenbing, MEI Guoxiong, et al. Analytical solution of sand-drained ground consolidation based on continuous drainage boundary[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2019, 51(2): 90–97.
- [19] 梅国雄, 夏君, 梅岭. 基于不对称连续排水边界的太沙基一维固结方程及其解答[J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(1): 28–31.
- MEI Guoxiong, XIA Jun, MEI Ling. Terzaghi's one-dimensional consolidation equation and its solution based on asymmetric continuous drainage boundary[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, 33(1): 28–31.
- [20] MEI Guoxiong, CHEN Qiming. Solution of Terzaghi one-dimensional consolidation equation with general boundary conditions[J]. *Journal of Central South University*, 2013, 20(8): 2239–2244.
- [21] 宗梦繁, 吴文兵, 梅国雄, 等. 连续排水边界条件下土体一维非线性固结解析解[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, 37(12): 2829–2838.
- ZONG Mengfan, WU Wenbing, MEI Guoxiong, et al. An analytical solution for one-dimensional nonlinear consolidation of soils with continuous drainage boundary[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, 37(12): 2829–2838.
- [22] 童立红, 王珏, 郭生根, 等. 变荷载下连续排水边界黏弹性地基一维固结性状分析[J]. *岩土力学*, 2019, 40(5): 1862–1868.
- TONG Lihong, WANG Jue, GUO Shenggen, et al. One-dimensional consolidation characteristics of viscoelastic foundation with continuous drainage boundary under time-dependent loading[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, 40(5): 1862–1868.

(编辑 杨幼平)